Teorema de Bolzano-Weierstrass

(para conjuntos)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

Ω es infinito y acotado $\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ ·J· ξ es punto de acumulación de Ω.

i.e. Todo conjunto finito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ·J· es infinito y acotado.

Como Ω es acotado, entonces

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ·J· $\forall x \in \Omega$, $a \leq x \leq b$.

$\therefore\ \Omega \subseteq [a, b]$

Al tomar el punto medio de $[a,b]$ se generan dos subintervalos.

Como Ω es infinito, al menos un subintervalo contiene infinitos elementos de Ω.

S.p.g llamémoslo $[a_1, b_1]$

Este cumple tres cosas

1) $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$
2) longitud de $[a_1, b_1] = \frac{1}{2}(b-a)$
3) en $[a_1, b_1]$ hay una infinidad de elementos de Ω.

Hagamos lo mismo empezando con el intervalo $[a_1, b_1]$:

Tomamos su punto medio y nos quedamos con el subintervalo que tenga una infinidad de elementos de Ω: $[a_2, b_2]$

Ahora $[a_2, b_2]$ cumple tres cosas

1 $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$

2) longitud de $[a_2, b_2] = \frac{1}{4}(b-a)$

3) $[a_2, b_2]$ contiene una infinidad de elementos de Ω.

Podemos proceder indefinidamente y generar una sucesión de intervalos $\{[a_n, b_n]\}$ que cumplen tres cosas.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$

2) longitud de $[a_n, b_n] = \frac{1}{2^n}(b-a)$

3) $[a_n, b_n]$ contiene una infinidad de elementos de Ω.

Notemos que se cumplen las hipótesis del teorema de encaje de intervalos.

(También a veces tomado como principio de completez en $\mathbb{R}$)

1) $\{[a_n, b_n]\}$ es un encaje de intervalos cerrados.

2) la longitud de $[a_n, b_n]$ tiende a 0.

$$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \right)$$

$\therefore \exists\, \xi \in \mathbb{R} \cdot\!\! \ni \cdot \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$ //

[P.D. ξ es punto de acumulación de Ω.]

Sea $r > 0$

[P.D. Hay una infinidad de elementos de Ω en $V_r(\xi)$]

Como las longitudes tienden a 0.

i.e. $\lim_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$

$\Longrightarrow \exists\, N(r) \cdot\!\! \ni \cdot \forall n > N, |b_n - a_n - 0| < r$

Como $|b_n - a_n| = b_n - a_n$

entonces $\exists\, N(r) \cdot\!\! \ni \cdot \forall n > N, b_n - a_n < r$

Sea $n > N$

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$

$\therefore \xi \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore a_n \leq \xi \leq b_n$

$\Longrightarrow [a_n, \xi] \subseteq [a_n, b_n]$ y $[\xi, b_n] \subseteq [a_n, b_n]$

Tomando en cuenta longitudes de intervalos

$\xi - a_n \leq b_n - a_n$ y $b_n - \xi \leq b_n - a_n$

Como $n > N \Longrightarrow b_n - a_n < r$

Entonces por transitividad

$\therefore \xi - a_n < r$ y $b_n - \xi < r$

$\therefore \xi - r < a_n$ y $b_n < \xi + r$

$\therefore [a_n, b_n] \subseteq (\xi - r, \xi + r) = V_r(\xi)$

y como hay una infinidad de elementos de Ω en $[a_n, b_n]$

$\Longrightarrow$ hay una infinidad de elementos de Ω en $V_r(\xi)$, $\forall r > 0$.

$\therefore$ ξ es punto de acumulación de Ω.

$\therefore$ Todo conjunto finito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Q.E.D.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

(para sucesiones)

$\forall \{x_n\}$ acotada $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ .t. ξ es punto límite de $\{x_n\}$

i.e. Toda sucesión acotada tiene al menos un punto límite.

i.e. $\forall \{x_n\}$ acotada $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$, $\exists \{x_{k_n}\}$ de $\{x_n\}$ .t. $\{x_{k_n}\} \to \xi$.

i.e. Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Demostración:

Caso 1: La imagen de $\{x_n\}$ es infinita.

$\therefore$ La imagen es un conjunto infinito y acotado.

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos, existe un punto de acumulación en el conjunto imagen.

(Punto de acumulación $\Longrightarrow$ punto límite)

$\therefore$ Hay al menos un punto límite.

Caso 2: La imagen de $\{x_n\}$ es finita.

Trivialmente se puede exhibir una subsucesión convergente: una subsucesión de constantes en donde la constante sea un elemento de la imágen.

$$\boxed{\therefore \forall \{x_n\} \text{ acotada } \exists\, \xi \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \xi \text{ es punto límite de } \{x_n\}}$$